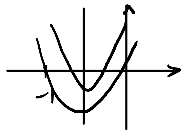
第 5 讲：极值综合问题

1. (2009 全国 II 理) 设 $f(x)=x^2+a\ln(1+x)$ 有两个极值点 x_1, x_2，且 $x_1<x_2$.

(1) 求实数 a 的范围;

(2) 证明: $f(x_2)>\dfrac{1-2\ln 2}{4}$.



(1) $f'(x)=2x+\dfrac{a}{x+1}=\dfrac{2x^2+2x+a}{x+1}$ $x\in(-1,+\infty)$

$h(x)=2x^2+2x+a$. 对称轴 $-\frac{b}{2a}=-\frac{1}{2}$.

$\begin{cases}\Delta>0 \\ 对称轴>-1 \\ 2-2+a>0\end{cases} \Rightarrow 0<a<\frac{1}{2}$.

(2) $x_2=\dfrac{-2+\sqrt{4-8a}}{4}=\dfrac{-1+\sqrt{1-2a}}{2}$.

$\begin{cases} f(x_2)=x_2^2+a\ln(1+x_2) \\ 2x_2^2+2x_2+a=0\end{cases}$ 求值域

$\therefore f(x_2)=x_2^2-(2x_2^2+2x_2)\ln(1+x_2)$.

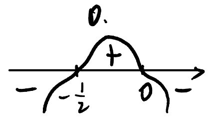
定义域 $x_2\in(-\frac{1}{2},0)$.

令 $g(x)=x^2-(2x^2+2x)\ln(1+x)$ $x\in(-\frac{1}{2},0)$.

$g'(x)=x-(4x+2)\ln(1+x)-\dfrac{2x^2+2x}{1+x}$

$=-(4x+2)\cdot\ln(x+1)>0$.

$-\frac{1}{2}$ 0.



$g(x)$ 在 $(-\frac{1}{2},0)$ 上↑.

$g(x)>g(-\frac{1}{2})$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}$

$\dfrac{1-2\ln 2}{4}$

即 $f(x_2)>\dfrac{1-2\ln 2}{4}$

2. （2017 全国 II）已知函数 $f(x)=ax^2-ax-x\ln x$，且 $f(x)\geq 0$.

（1）求 a；

（2）证明：$f(x)$ 存在唯一的极大值点 x_0，且 $e^{-2}<f(x_0)<2^{-2}$.

解 (1) $f'(x)=2ax-a-\ln x-1$

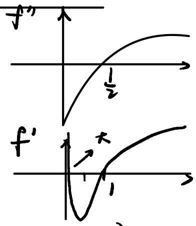
$f(1)=0$.

$f'(1)=a-1=0\Rightarrow a=1$.

(2) $f(x)=x^2-x-x\ln x$.

$f'(x)=2x-1-\ln x-1=2x-\ln x-2$ $x\in(0,+\infty)$

$f''(x)=2-\frac{1}{x}$ $0<x_0<\frac{1}{2}$



$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$

$-\frac{1}{2}\ln 2$

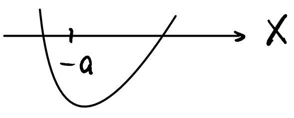
3. （2007 全国）设函数 $f(x)=\ln(x+a)+x^2$.

（1）若当 $x=-1$ 时，$f(x)$ 取得极值，求 a 的值，并讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $f(x)$ 存在极值，求 a 的取值范围，并证明所有极值之和大于 $\ln\dfrac{e}{2}$.

$f(x_1)+f(x_2)$

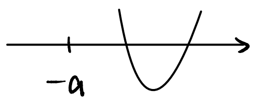
(2) $f'(x)=\dfrac{1}{x+a}+2x=\dfrac{2x^2+2ax+1}{x+a}$, $x\in(-a,+\infty)$



$2a^2-2a^2+1<0$.

令 $g(x)=2x^2+2ax+1$

$\because g(-a)=1>0$ $\therefore f(x)$ 只能有 2 个极值点.



$\begin{cases}\Delta>0 & \Rightarrow a>\sqrt{2} \\ -\frac{a}{2}>-a & \Rightarrow a>0 \\ g(-a)>0\end{cases} \Rightarrow a>\sqrt{2}$.

4. （2018•全国卷Ⅰ）已知函数 $f(x)=\frac{1}{x}-x+a\ln x$.

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1，x_2，证明：$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$.

(2) $f'(x)=-\frac{1}{x^2}-1+\frac{a}{x}=\frac{-x^2+ax-1}{x^2}$

由(1)可知 $a\geq 2$ 时 $f(x)$ 存在2个极值点，

x_1,x_2 满足 $x_1+x_2=a$. $x_1\cdot x_2=1$.

$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{\frac{1}{x_1}-x_1+a\ln x_1-\frac{1}{x_2}+x_2-a\ln x_2}{x_1-x_2}=a\frac{\ln x_1-x_2}{x_1-x_2}-2.$

要证 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$

$\Leftrightarrow \frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}<1$

$\Leftrightarrow \ln x_1-\ln x_2<x_1-x_2.$

$\Leftrightarrow \ln x_1-\ln\frac{1}{x_1}<x_1-\frac{1}{x_1}$

$\Leftrightarrow x_1-\frac{1}{x_1}-2\ln x_1>0$

令 $g(x)=x-\frac{1}{x}-2\ln x \quad (x>1)$

$g'(x)=1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}=\frac{x^2-2x+1}{x^2}>0.$

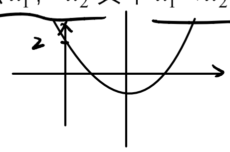
$g(x)$ 在 $(1,+\infty)\uparrow$.

$\therefore g(x)>g(1)=0.$

5. 已知函数 $f(x)=2\ln x+x^2-ax(a\in R)$ 有两个极值点 x_1，x_2 其中 $x_1<x_2$.

（1）求实数 a 的取值范围；

（2）当 $a\geq 2\sqrt{e}+\frac{2}{\sqrt{e}}$ 时，求 $f(x_1)-f(x_2)$ 的最小值 .



(1) $f'(x)=\frac{2}{x}+2x-a=\frac{2x^2-ax+2}{x}$ $x\in(0,+\infty)$

$\begin{cases}\Delta>0\\ \text{对称轴}>0\end{cases}\Rightarrow a>4.$ $\begin{cases}x_1+x_2=\frac{a}{2}\\ x_1\cdot x_2=1\end{cases}$

(2). $f(x_1)-f(x_2)=2\ln x_1+x_1^2-ax_1-2\ln x_2-x_2^2+ax_2$

$=2\ln x_1-2\ln x_2+(x_1^2-x_2^2)-a(x_1-x_2)$ 消 a.

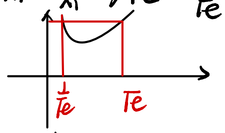
$=2\ln x_1-2\ln x_2+x_1^2-x_2^2-2(x_1+x_2)(x_1-x_2)$

$=2\ln x_1-2\ln x_2-x_1^2+x_2^2=4\ln x_1-x_1^2+\frac{1}{x_1^2}=2\ln x_1^2-x_1^2+\frac{1}{x_1^2}$

令 $g(x)=2\ln x-x+\frac{1}{x}$

$2(x_1+x_2)\geq 2\sqrt{e}+\frac{2}{\sqrt{e}}$

$x_1+\frac{1}{x_1}\geq\sqrt{e}+\frac{1}{\sqrt{e}}$



$0<x_1\leq\frac{1}{\sqrt{e}}$ $x=x_1^2$

定义域 $0<x\leq\frac{1}{e}$

$g'(x)=\frac{2}{x}-1-\frac{1}{x^2}=\frac{-x^2+2x-1}{x^2}<0$

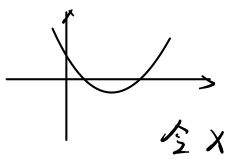
$g(x)$ 在 $(0,\frac{1}{e})\downarrow$. $g(x)_{min}=g(\frac{1}{e})=e-2-\frac{1}{e}$.

6. 已知 $f(x)=x^2-2ax+\ln x$.

（1）当 $a=1$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）若 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数，$f(x)$ 有两个不相等的极值点 x_1，$x_2(x_1<x_2)$ 求 $2f(x_1)-f(x_2)$ 的最小值 .

Δ



$f'(x)=2x-2a+\frac{1}{x}=\frac{2x^2-2ax+1}{x}$

$\begin{cases}\Delta=4a^2-4\times2\times1>0\\ \frac{a}{2}>0\end{cases}\Rightarrow a>\sqrt{2}$ $\begin{cases}x_1+x_2=a.\\ x_1\cdot x_2=\frac{1}{2}.\end{cases}$

$2f(x_1)-2f(x_2)=2x_1^2-4ax_1+2\ln x_1-x_2^2+2ax_2-\ln x_2$

$=2x_1^2-4(x_1+x_2)x_1+2\ln x_1-x_2^2+2(x_1+x_2)x_2-\ln x_2$

$=-2x_1^2+x_2^2-2x_1x_2+2\ln x_1-\ln x_2$

$=-\frac{1}{2}\frac{1}{x_2^2}+x_2^2-1+2\ln\frac{1}{2x_2}-\ln x_2=x_2^2-\frac{1}{2}\frac{1}{2x_2^2}$ 22 $-3\ln x_2-2\ln 2-1$

令 $x_2^2=x$.

$g(x)=x-\frac{1}{2x}-\frac{3}{2}\ln x-2\ln 2-1$

$\frac{1}{2x_2}+x_2=a>\sqrt{2}$.

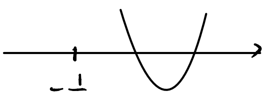
$x_2>\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow x>\frac{1}{2}$

7. （2014 湖南）已知常数 $a>0$，函数 $f(x)=\ln(1+ax)-\frac{2x}{x+2}$.若 $f(x)$ 存在两个极值点，且 $f(x_1)+f(x_2)>0$，求 a 的取值范围.

$x\in(-\frac{1}{a},+\infty)$ 且 $x\neq-2$

$$f'(x)=\frac{a}{ax+1}-\frac{2(x+2)-2x}{(x+2)^2}=\frac{a}{ax+1}-\frac{4}{(x+2)^2}=\frac{a(x+2)^2-4ax-4}{(ax+1)(x+2)^2}=\frac{ax^2+4a-4}{(ax+1)(x+2)^2}$$

$ax+1>0$.



$-\frac{1}{a}$

$$\begin{cases}\text{对称轴}=0>-\frac{1}{a}\\ \Delta=-4a(4a-4)>0\\ a\cdot\frac{1}{a^2}+4a-4>0\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}a<1\\ a\neq\frac{1}{2}\end{matrix}\quad a\in(0,\tfrac{1}{2})\cup(\tfrac{1}{2},1).$$

根不能是 -2.

代入 -2. $4a+4a-4\neq0$. $a\neq\frac{1}{2}$.

$$\begin{cases}x_1+x_2=0.\\ x_1\cdot x_2=\frac{4a-4}{a}\end{cases}$$

$f(x_1)+f(x_2)=\ln(1+ax_1)-\frac{2x_1}{x_1+2}+\ln(1+ax_2)-\frac{2x_2}{x_2+2}$

$=\ln[1+a(x_1+x_2)+a^2x_1x_2]-\frac{2x_1x_2+4x_1+2x_1x_2+4x_2}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}$

$=\ln[1+4a^2-4a]-\frac{4x_1x_2}{x_1x_2+4}$

① $a\in(\frac{1}{2},1)$

$=2\ln(2a-1)-\frac{\frac{16a-16}{a}}{\frac{8a-4}{a}}$ 超越不等式

$=2\ln(2a-1)-\frac{4a-4}{2a-1}>0$ 猜根+单调性.

令 $2a-1=x$，$2\ln x-\frac{2x-2}{x}>0$.

$\boxed{\ln x+\frac{1}{x}-1}>0$. 令 $h(x)=$

$h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}<0$ 单减.

$0<x<1$.

$0<2a-1<1$

$a\in(0,\frac{1}{2})$ 同理求解

8. （2017 江苏）已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$（$a>0,b\in R$）有极值，且导函数 $f'(x)$ 的极值点是 $f(x)$ 的零点.（极值点是指函数取极值时对应的自变量的值）

（1）求 b 关于 a 的函数关系式，并写出定义域；

（2）证明：$b^2>3a$；

（3）若 $f(x),f'(x)$ 这两个函数的所有极值之和不小于 $-\frac{7}{2}$，求 a 的取值范围.

(1) $f'(x)=3x^2+2ax+b$.

$\Delta=4a^2-12b>0\Rightarrow a^2>3b$.

$f'(x)$ 的极值点 $x_0=-\frac{a}{3}$ 则

$f(x_0)=-\frac{a^3}{27}+\frac{a^3}{9}-\frac{ab}{3}+1=0$.

$\therefore b=\frac{2}{9}a^2+\frac{3}{a}$

$3b=\frac{2}{3}a^2+\frac{9}{a}$

$a^2>\frac{2}{3}a^2+\frac{9}{a}$

$\Rightarrow a>3$.

(2) $b^2-3a=\frac{4}{81}a^4+\frac{9}{a^2}+\frac{4}{3}a-3a$

$=\frac{4}{81}a^4+\frac{9}{a}-\frac{5}{3}a=\frac{4a^6-5\times27a^3+9\times81}{81a^2}$

$=\frac{(4a^3-27)(a^3-27)}{81a^2}$ $(a^3>27)$

>0. 换a.

$f'(x)$ 最小值 $f'(-\frac{a}{3})$

(3) 设 x_1,x_2 是 $f(x)$ 的两极值点

$f(x_1)+f(x_2)+3\cdot\frac{a^2}{9}-\frac{2a^2}{3}+b$

$=x_1^3+x_2^3+a(x_1^2+x_2^2)+b(x_1+x_2)$ ……

$=\frac{4a^3}{27}-\frac{2ab}{3}+2-\frac{a^2}{3}+b$

$=\frac{4}{27}a^3-\frac{2}{3}ab-\frac{a^2}{3}+b+2$

$=\frac{3}{a}-\frac{a^2}{9}\geqslant-\frac{7}{2}$

$-2a^3+54\geqslant-63a$.

$2a^3-63a-54\leqslant0$.

$x=6$.

根一定是常数项的因数.

$2a^2(a-6)+3(4a^2-21a-18)$

$2a^2(a-6)+3(4a+3)(a-6)$

$(a-6)(2a^2+12a+9)\leqslant0$.

>0

$\therefore 3<a\leqslant6$.